Molteplicità potenziale e creatività al tempo del computer: un matematico del 2000 legge Calvino

Gabriele Lolli

L'ipotesi di un'affinità tra la concezione e la pratica della letteratura, come descritte da Italo Calvino, in particolare nelle *Lezioni americane*,[1] e la natura della produzione matematica è stata proposta e argomentata in dettaglio.[2] Ma la matematica non è sempre uguale a sé stessa; oltre che per l'effetto di fattori endogeni, i suoi cambiamenti recenti sono dovuti anche a pressioni sociali (poco presenti alla coscienza comune) e tecnologiche (invece evidenti). La matematica della seconda metà del Novecento è stata caratterizzata dalla sintesi, compiuta dai matematici che si riconoscevano sotto il nome fittizio di Nicolas Bourbaki, delle tendenze maturate nei precedenti cento anni.[3] I fenomeni fondamentali di cui occorre essere consapevoli sono: il ritorno al metodo assiomatico e la costituzione della logica matematica (entrambi iniziati nella seconda metà dell'Ottocento e per la logica completato negli anni venti del Novecento nella scuola di David Hilbert);[4] la nascita della teoria degli insiemi che, orientata all'inizio allo studio dell'infinito da parte di Georg Cantor, si è trasformata nella prima metà del Novecento in una teoria onnicomprensiva di tutta la matematica, in iniziale concorrenza con la teoria logica dei tipi di Bertrand Russell; la comparsa della teoria della computabilità negli anni trenta del Novecento, e del modello teorico del calcolatore, poi implementato sotto la spinta delle esigenze belliche.[5]

Calvino quando scriveva le *Lezioni americane* era certamente informato sulla matematica contemporanea, almeno nella sua sistemazione bourbakista—forse meno sulle tendenze di sviluppo—grazie alla sua familiarità con Raymond Queneau,[6] amico di Bourbaki e autore di una sua celebre esaltazione in "Les Mathématiques de demain." Per quel che riguarda le conseguenze degli usi del calcolatore, soprattutto in domini mentali più ampi del puro calcolo, le informazioni di Calvino erano tratte dai "libri scientifici in cui ficc[ava] il naso alla ricerca di stimoli per l'immaginazione,"[7] e le troviamo esposte nella conferenza "Cibernetica e fantasmi (Appunti sulla narrativa come processo combinatorio)" del 1967.[8]

---

[1] Italo Calvino, *Lezioni americane. Sei proposte per il prossimo millennio* (Milano: Garzanti, 1988) incluso in *Saggi 1945–1985*, a cura di M. Barenghi (Milano: Mondadori, 1995), 1:627–754. I riferimenti delle citazioni dalle *Lezioni* rimandano all'edizione Mondadori.

[2] Si veda Gabriele Lolli, *Discorso sulla matematica. Una rilettura delle* Lezioni americane *di Italo Calvino* (Torino: Bollati Boringhieri, 2011).

[3] Tra il 1931 e il 1935 il gruppo di giovani francesi che si chiamavano collettivamente Bourbaki incominciarono a pensare a una rivitalizzazione della matematica del loro paese elaborando una diversa presentazione della disciplina che includesse tutte le novità prodotte negli anni precedenti. Alla prima riunione ufficiale nel 1935 parteciparono Henri Cartan, Claude Chevalley, Jean Dieudonné, André Weil, Jean Delsarte, Charles Ehresmann.

[4] Il primo testo di logica moderna è quello di David Hilbert e Wilhelm Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik* (Berlino: Springer, 1928). Quando parliamo di logica ci riferiamo a questa impostazione.

[5] Molti i padri, tra i quali Kurt Gödel, Alonzo Church, Alan M. Turing, Emil L. Post, John von Neumann.

[6] Raymond Queneau, "Bourbaki et les mathématiques de demain," *La Critique* 176 (1962), ristampato in Raymond Queneau, *Bords* (Paris: Hermann, 1963), 11–29.

[7] Calvino, "Esattezza," in *Lezioni americane*, 688.

[8] Italo Calvino, "Cibernetica e fantasmi (Appunti sulla narrativa come processo combinatorio)," [1967], ora in Italo Calvino *Una pietra sopra* (Torino: Einaudi, 1980), 164–81; inclusa in Calvino, *Saggi 1945–1985*, 1:205–25. I riferimenti delle citazioni rimandano all'edizione Mondadori. L'attenzione di Calvino continuerà

Le conoscenze di Calvino risentono della cultura italiana, dove si usava ancora il termine "Cibernetica," nato dalla teoria dell'informazione e della comunicazione, invece di "Intelligenza Artificiale." L'unico intellettuale che informava il pubblico sulle nuove prospettive dell'analisi della mente negli anni sessanta era forse Silvio Ceccato; la terminologia era incerta, "combinatoria" per esempio in Calvino si riferisce all'omonima teoria matematica, ma anche genericamente alla manipolazione di simboli o a processi meccanici, in senso intuitivo.

Con l'entrata nel nuovo millennio si delinea tuttavia nella matematica, a coronamento dell'eredità ricevuta, un fenomeno originale e potenzialmente destabilizzante, quello di affidare al calcolatore addirittura la costruzione di dimostrazioni: gli sviluppi prevedibili alimentano le preoccupazioni non solo di chi si interessa della filosofia della matematica, ma di coloro che si dedicano alla ricerca avanzata e preparano i ricercatori del prossimo futuro. Calvino nella scelta dei valori, qualità, e specificità della letteratura compiuta nelle *Lezioni* voleva "situarle nella prospettiva del nuovo millennio";[9] in questo lavoro intendiamo verificare se la loro trasposizione alla matematica regga alle trasformazioni in corso. Nel primo paragrafo di questo saggio illustriamo come lo studio della dimostrazione formale nel corso del Novecento dia vita a una nuova rigorosa disciplina, la meta-matematica, i cui caratteri presentano—suggeriamo nella conclusione del paragrafo—delle affinità con la letteratura come la vede Calvino, e soprattutto con il modo in cui funzionano fiabe e racconti popolari. Il secondo paragrafo traccia in breve l'evolversi—soprattutto grazie al cosidetto gruppo Bourbaki, che influenzò molto anche Queneau e l'Oulipo—dell'impostazione puramente formalista e strutturalista nel linguaggio matematico. Nel terzo paragrafo viene illustrata l'enorme proliferazione a partire dal secondo dopoguerra della ricerca matematica sulla scia di Bourbaki e le profonde conseguenze dell'affermarsi del processo di astrazione e di analogia (e della loro interazione). Nel quarto paragrafo si affrontano i paradossi, anche a livello didattico, che l'affermarsi sempre maggiore del calcolatore, cioè di dimostratori elettronici automatici o interattivi, stanno causando in quello che Calvino chiamava nelle *Lezioni Americane* il "prossimo millennio." Partendo dal saggio calviniano del 1967, "Cibernetica e fantasmi," e guardando al Calvino "oulipiano" e poi a *Se una notte d'inverno un viaggiatore*, i paragrafi 5–7 delineano come Calvino abbia, soprattutto attraverso suggerimenti derivati dal rapporto con Queneau, a modo suo adottato i due principi della molteplicità potenziale rappresentati dall'assiomatica e dalle dimostrazioni formali, e offerto d'altro canto importanti riflessioni a riguardo che interessano profondamente non solo la letteratura e il modo in cui funzionano immaginazione, fantasia e creatività, ma anche la matematica e il suo futuro, nonché quello dell'uso di cervelli elettronici e computer.

1. Assiomatica e dimostrazioni, fiabe e racconti.

La ripresa del metodo assiomatico nella matematica nell'Ottocento, dopo un lungo periodo nel quale se ne era fatto a meno—teorie dell'età moderna come il calcolo infinitesimale o la geometria proiettiva non erano state completamente assiomatizzate, e neanche l'algebra—è legata alla comparsa di oggetti, enti, o concetti nuovi.

I nuovi concetti nascevano da generalizzazioni o astrazioni di quelli tradizionali. Qualche esempio: nella scuola algebrica inglese una strategia seguita era quella di modificare parzialmente le leggi delle operazioni aritmetiche. Nel corso di ricerche tradizionali, per esempio sulle equazioni algebriche di grado superiore al quarto, certe mosse eseguite sugli oggetti, come le permutazioni delle radici, venivano considerate per la prima volta operazioni

a essere vigile, come si vede dalla terminologia, che sarà più aggiornata nelle *Lezioni*, con "informatica," "software" (vd. "Leggerezza," in *Lezioni americane*, 636) rispetto al 1967.

[9] Calvino, *Lezioni americane*, 629.

matematiche invece che varianti di scrittura, e ne venivano registrate le proprietà per eventualmente trasportarle in altri casi; da tali riconoscimenti si formerà il concetto di gruppo, assiomatizzato da Arthur Cayley nel 1854.

Per giustificare le nuove ricerche relative a enti che, a differenza delle figure e dei numeri, non si potevano rintracciare direttamente in natura, esisteva un'indicazione, adottata fin dai primordi della disciplina in Grecia: il modello di presentazione degli *Elementi* di Euclide era riconosciuto come il paradigma della matematica. Rispetto a Euclide, che introduceva la ricerca con definizioni, postulati, e nozioni comuni, la terminologia era parzialmente mutata con la sistemazione sanzionata da Hilbert nelle *Grundlagen der Geometrie* del 1899. Gli analoghi dei postulati di Euclide sono ora chiamati assiomi,[10] mentre alle nozioni comuni corrispondono i nostri assiomi dell'uguaglianza.[11] Le definizioni invece,[12] che non sono le nostre definizioni nominali, ma piuttosto precisano, in modo condizionato e accettato dalla cultura del tempo, i termini che Euclide intende usare,[13] non compaiono nelle nuove teorie. In questo modo il metodo assiomatico di fine Ottocento presenta un sottile ma fatale spostamento di concezione, non facile da cogliere e fonte di ambiguità: il metodo richiede la capacità di ragionare senza fare appello al significato dei termini, ma solo facendo attenzione a rispettare le restrizioni formali imposte dagli assiomi.

Gli algebristi inglesi di metà Ottocento, George Peacock, Duncan Gregory, Augustus De Morgan, George Boole, per primi insistettero che il senso delle operazioni consistesse solo nelle regole a cui gli assiomi le vincolavano. Ne seguiva la possibilità teorica che diversi sistemi di enti fossero dotati di operazioni o relazioni che soddisfacevano le stesse proprietà. Poi fu riconosciuta la possibilità effettiva di una tale situazione, anche per gli assiomi familiari delle operazioni aritmetiche, quando si distinsero l'algebra aritmetica e l'algebra simbolica,[14] con le stesse regole delle operazioni ma diversi oggetti. Infine venne la ricerca intenzionale di tali molteplici interpretazioni, che permetteva di portare per esempio la geometria sotto l'ala dell'algebra simbolica. Nello stesso tempo l'assetto assiomatico aumentava l'importanza delle dimostrazioni, perché l'unica giustificazione dei teoremi stava nel legame di tali enunciati con gli assiomi. Nel fatto, si diceva che tali enunciati erano "conseguenza" degli assiomi.

Hilbert è stato solo uno degli artefici della rinascita e della nuova concezione del metodo assiomatico; invece il suo ruolo nella logica è stato indispensabile. Per secoli, anzi millenni, si era dato per scontato che si sapesse dimostrare, ma non cosa fosse una dimostrazione. Si parlava al massimo di un legame logico tra le singole affermazioni in cui si articolava il ragionamento, benché la logica non fosse precisata. Ci si riferiva eventualmente alla logica aristotelica ereditata dalla Scolastica, che tuttavia era limitata ai sillogismi, che trattavano solo predicati, non relazioni. Descartes, come è noto, obiettava che quella logica era sterile, e sosteneva che le dimostrazioni geometriche erano invece trasformazioni di enunciati fatte a

[10] Non è stata una scelta felice, perché "assioma" in greco significa "che ha valore," e quindi che ha e conferisce peso, autorità. Nei vocabolari della lingua italiana se ne sente l'eco dove alla voce "assioma" si legge tuttora il significato nel Grande Dizionario della lingua italiana: "Assioma ... Sentenza a cui si conferisce valore assoluto … proposizione che si ammette universalmente. Postulato, proposizione ammessa come vera, ma non dimostrata, e necessaria per spiegare un fatto o per procedere a una dimostrazione." (AAVV, *Grande dizionario della lingua italiana*. Torino: Treccani, 2019. Vol. I, 769). https://www.gdli.it/pdf_viewer/Scripts/pdf.js/web/viewer.asp?file=/PDF/GDLI01/GDLI_01_ocr_778.pdf&parola=assioma)

[11] Esemplificate dall'affermazione che se uguali sono aggiunti a uguali i risultati sono uguali (la seconda), e se due uguali sono sottratti da uguali i resti sono uguali (la terza).

[12] In greco *óroi*, che significava termini, o limiti, anche nel senso di scopo, e quindi forse a intendere quello che si voleva studiare.

[13] Per esempio "I.1 Un punto è ciò che non ha parti, I.2 Una linea è una lunghezza senza larghezza […] I.4 Una linea retta è una linea che è posta a uguale livello rispetto ai punti su se stessa."

[14] Terminologia di George Peacock, ora desueta.

piccoli passi in modo che fosse evidente, e intuitivamente vero, il passaggio dall'uno all'altro trasformato.

All'inizio non è la dimostrazione al centro degli interessi della nascente logica matematica, ma la definizione del linguaggio. A metà Ottocento, nell'algebra della logica, Boole sceglieva il formato delle equazioni per la rappresentazione delle frasi ("=" come verbo "è"), usando sistemi di equazioni come in matematica. Un linguaggio completamente simbolico più ricco venne inventato con la *Begriffsschrift* da Gottlob Frege nel 1879, seguito dalla pasigrafia del matematico e glottologo italiano Giuseppe Peano, a iniziare dal 1888.[15] Entrambi introducevano gli operatori logici della quantificazione (esistono alcuni …, tutti i …) ed erano quindi sostanzialmente capaci di rappresentare ogni argomento matematico conservando la struttura del discorso naturale. Perfezionamenti, semplificazioni, aggiunte (soprattutto per esaminare con precisione la formulazione delle antinomie emerse dallo studio dell'infinito, come nel linguaggio della logica con tipi di Russell) si sono susseguiti fino agli anni venti, tutti con l'obiettivo della costruzione di un linguaggio perfetto, dalla sintassi priva di ambiguità.

Un segno della disinformazione tuttora prevalente nell'opinione comune è l'idea che con la spiegazione nella logica formale della nozione di dimostrazione questa abbia trovato per la prima volta una definizione precisa.[16] Nello stesso tempo la presunta appropriazione del concetto di dimostrazione viene anche denunciata dai nemici della logica come una rappresentazione irrealistica del lavoro del matematico.

In verità l'unico logico tra i pionieri che abbia scritto dimostrazioni matematiche nel linguaggio completamente simbolico da lui inventato è stato Peano, col doppio obiettivo di evitare errori e ottenere una presentazione compressa delle teorie, e prevalenza del secondo. A parte Peano, le dimostrazioni formali non erano considerate da nessuno uno strumento per fare matematica; il loro rigore, secondo i detrattori era solo il *rigor mortis*. Le critiche rivolte alla formalizzazione delle dimostrazioni abbozzata nei *Principia mathematica* di Whitehead e Russell, a cominciare da quella famosa di Henri Poincaré, con la perplessità che "se per stabilire che 1 è un numero occorrono 27 equazioni, chissà quante ne occorrono per un vero teorema,"[17] riguardavano sia la loro lunghezza sia soprattutto la mancanza di senso, il loro carattere "meccanico," nell'accezione negativa comune.

Il concetto di dimostrazione divenne oggetto di studio scientifico nella scuola di Hilbert a Göttingen negli anni venti del Novecento. Nel nuovo secolo, lo studio della logica incominciava a essere abbastanza avanzato da permettere di usare la parola "deduzione" in

[15] Giuseppe Peano, *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnunglehre di H. Grassmann, preceduto dalle operazioni della logica deduttiva* (Torino: Bocca, 1888). Pasigrafia, dal greco: "linguaggio per tutti."

[16] Formale si dice un linguaggio costruito su un alfabeto di segni le cui parole sono successioni finite di quei segni; le categorie più importanti sono quella dei termini, o descrizioni, e quella delle formule; in queste si possono sostituire termini alle variabili, se ne contengono che non sono vincolate da quantificatori (altrimenti si chiamano enunciati); tutte le nozioni sintattiche sono definite da precise regole di formazione. Una dimostrazione formale, nel linguaggio dato, di un enunciato A da un insieme di enunciati (teoria) T in una logica L è una successione finita di formule $A_1, A_2, \ldots, A_n$ tale che A_n sia A e per ogni $i \leq n$ A_i sia un elemento di T o esistano $j, k < n$ tali che A sia la conclusione di una regola logica di L che ha A_j e A_k come premesse, o che esista $j < k$ tale che A_i sia la conclusione di una regola logica di L che ha A_j come premessa. Per semplicità di espressione, che sarebbe troppo involuta con regole più generali, si assume che la logica abbia solo regole d'inferenza con una o due premesse, come è la quasi totalità di quelle conosciute. In alternativa la dimostrazione formale è definita come una struttura ad albero, o come un grafo.

[17] Henri Poincaré, "Les mathématiques et la logique," *Revue de Métaphysique et de Morale* 14 (1906): 17–38, 294–317 ristampato in Henri Poincaré, *Science et Méthode* (Paris: Flammarion, 1908), 172–91; la frase si legge nel cap. 5, "L'infaillibilité de la logistique"; trad. it. *Scienza e metodo* (Torino: Einaudi, 1997).

riferimento ai teoremi, invece di dire che essi erano “conseguenza” degli assiomi;[18] con qualche incertezza o con un tacito assunto della equivalenza delle due formulazioni. Si trattava di un assunto molto ardito, se cosciente: tutti erano familiari infatti con le poche inferenze logiche più usate (che erano sostanzialmente già note agli stoici, a partire dal IV secolo a. C.), ma non potevano essere certi che comprendessero tutte quelle lecite, o necessarie, né si aveva idea di come si potessero trovare tutte.

La logica è diventata scienza quando si è riusciti a esprimerla in modo tale da permettere di formulare in modo rigoroso problemi come quello indicato (dell’equivalenza tra conseguenza e deduzione, cioè della completezza di un sistema logico),[19] e a risolverli attraverso dimostrazioni (metalogiche), grazie anche al contributo della teoria degli insiemi che permette di esprimere in modo preciso la semantica, e in particolare il concetto di conseguenza.

Hilbert si è dedicato a sistemare la logica con uno scopo preciso, quello di poter concepire la logica stessa come un sistema assiomatico. Tale obiettivo era un tassello di un progetto più ampio relativo al metodo assiomatico che richiedeva di dimostrare la coerenza sintattica di ogni teoria,[20] come garanzia dell’esistenza degli enti trattati dalla teoria. Ma bisognava evitare il rimando da una teoria a quella in cui si dimostra la coerenza della stessa, e in particolare per quelle problematiche, che trattavano enti astratti, non si poteva dedurre la coerenza dalle proprietà dei loro oggetti. Hilbert si rendeva conto che la coerenza doveva essere dimostrata con metodi elementari e sicuri disponibili in ogni teoria. Concepì quindi l’idea che l'unica possibilità fosse quella di formalizzare le teorie, cioè scriverle in un linguaggio formale dimenticandone il senso inteso e lavorando sullo scheletro residuo; questo, incluse le dimostrazioni, sarebbe stato un insieme articolato di parole finite su un alfabeto di simboli, e si sarebbe ragionato non sulle teorie matematiche, ma su schemi formali privi di significato, e assoggettabili a manipolazioni combinatorie la cui coerenza non era in dubbio.

Lo studio della dimostrazione formale è entrato nella matematica nel 1922 come una nuova disciplina che Hilbert ha chiamato *Beweistheorie*, alla lettera “teoria della dimostrazione,”[21] o metamatematica. Con questo neologismo ispirato ai libri di meta[dopo]-fisica di Aristotele (e che si applica anche ad altri concetti, come logica e linguaggio) s’intende in generale una matematica che assume la matematica stessa come oggetto di studio, e per la quale si richiede che abbia la stessa impostazione, metodo e rigore di una qualsiasi disciplina matematica.[22] Per realizzarla, “Primo: Tutto ciò che finora costituisce la matematica vera e propria viene adesso rigorosamente formalizzato, cosicché la matematica

---

[18] Una formula *A* è conseguenza di un insieme di enunciati *T* se *A* risulta valida, cioè soddisfatta da tutti gli elementi, in un qualsiasi modello di *T*. Un modello di *T* è una struttura su cui si possa interpretare il linguaggio e nella quale tutti gli enunciati di *T* risultano veri.

[19] Il problema è posto in Hilbert e Ackermann, *Grundzüge der theoretischen Logik*, e dimostrato da Gödel nella tesi di laurea del 1929. Una logica è completa se ogni formula logicamente valida, cioè valida in ogni modello, è dimostrabile.

[20] Una teoria *T* è (sintatticamente) coerente, o non contraddittoria, in una logica *L*, se non esistono due dimostrazioni formali da *T* di un enunciato e della sua negazione. Se la logica è completa la proprietà di coerenza di *T* implica l’esistenza di un modello di *T*. Una teoria *T* invece si dice completa se per ogni enunciato esiste o una sua dimostrazione o una dimostrazione della sua negazione.

[21] “Per raggiungere i nostri scopi dobbiamo rendere oggetti della nostra indagine le dimostrazioni in quanto tali [che prima] rientravano nel campo del pensiero.” Si veda David Hilbert, “Neubegrüngung der Mathematik. Erste Mitteilung” *Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Hamburgischen Universität* 1 (1922): 157–77; tradotto come “Nuova fondazione della matematica” in David Hilbert, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, a cura di Michele V. Abrusci (Napoli: Bibliopolis, 1978), 189–213; Si veda la pagina 204.

[22] Hilbert le assegnava solo metodi speciali, ristretti, per i particolari suoi obiettivi. In seguito, per le applicazioni alla teoria dei modelli, le restrizioni cadranno.

propriamente detta o la matematica in senso stretto diviene un complesso di formule dimostrabili. […] Secondo: A questa matematica vera e propria si aggiunge una matematica in un certo senso nuova, una metamatematica, che serve per dare sicurezza a quella."[23]

I due aspetti della matematica moderna ora ricordati, il metodo assiomatico e le dimostrazioni formali, possono essere confrontati con strategie letterarie care a Calvino. Notiamo che nelle fiabe si prescinde dal significato dei termini: cosa è un orco? Non è mai definito, qualche volta è descritto come essere deforme, o mostro antropomorfo, ma gli sono associati elementi caratteristici ricorrenti: fa paura, brutto, cattivo, antropofago, con poteri superiori se non magici, ma anche stupido, ecc. Si potrebbe dire che è caratterizzato assiomaticamente con alcuni tratti. Ognuno poi se lo immagina come vuole. Così gli altri personaggi o elementi delle fiabe, il re, la principessa, la strega, il castello, il reame sono solo simboli, segnaposti con una precisa funzione nell'economia della storia. Il re deve mandare i figli a compiere una missione. Il reame si estende per diversi giorni di cammino. Il castello contiene la principessa prigioniera, per il resto è indifferente come sia costruito, a meno che essendo difeso da un drago non abbia bisogno di un ampio fossato colmo d'acqua.

Nelle fiabe e nei racconti popolari (*folktales*), osserva Calvino, si trascurano i dettagli. Al contrario s'insiste sulle ripetizioni, "per esempio quando la fiaba consiste in una serie di ostacoli da superare." Le fiabe e i racconti sono narrati con grande economia espressiva. Se un re è malato, non c'è bisogno di dire di quale malattia. "Ma tutto ciò che è nominato ha una funzione necessaria nell'intreccio."[24]

La lezione sulla rapidità inizia con la presentazione di una leggenda relativa a Carlomagno, un racconto secco dove gli avvenimenti si susseguono veloci, come in uno "scarno riassunto, dove tutto è lasciato all'immaginazione e la rapidità della successione dei fatti dà un senso d'ineluttabile."[25] A tenere assieme la catena di avvenimenti c'è come in tutti i *folktale* un legame verbale (in questo caso la parola "amore"), e un legame narrativo, un anello magico che "stabilisce tra i vari episodi un rapporto di causa ed effetto." Altre versioni della leggenda esaminate da Calvino non presentano lo stesso incalzare dei fatti, e dal confronto si coglie quanto si guadagni dall'eliminazione di ciò che non è rilevante per la trasmissione del messaggio inteso, dalla voluta povertà dignitosa dei mezzi espressivi. Le caratteristiche messe in evidenza evocano in chi è familiare con esse le dimostrazioni formali: lo scarno riassunto, l'economia espressiva che accetta solo quello che è necessario per arrivare alla conclusione, la ripetizione delle regole e delle inferenze quasi obbligata, visto che sono così poche quelle a cui si è tenuti, l'immaginazione soggettiva che silenziosamente accompagna lo sviluppo formale, il senso d'ineluttabile magari percepito in modo riluttante, ma a cui non si sa cosa obiettare.

In Lolli, *Discorso sulla matematica*, 84 ss. sono riportati in diversi formati esempi di dimostrazioni formali del sillogismo. Da esse si vede come la circostanza che tutto sia affidato all'immaginazione è tipico delle dimostrazioni formali: non si dice nulla di concreto; ci si concentra solo sulla scansione. Nella formalizzazione gli avvenimenti letteralmente "diventano puntiformi, collegati da segmenti rettilinei, in un disegno a zigzag che corrisponde a un movimento senza soste."[26]

Se si vuole, mentre si recita la successione delle formule della dimostrazione, si può naturalmente via via commentare a parole o illustrare con schizzi una situazione immaginata,

[23] Hilbert, *Ricerche sui fondamenti della matematica*, 210. I metodi della metamatematica, manipolazioni combinatorie, erano chiamati da Hilbert *finit*, un neologismo tradotto finitari o finitisti. La metamatematica allargherà i suoi compiti e metodi anche a problemi diversi dalla sicurezza della non-contraddittorietà, per esempio lo studio della complessità delle dimostrazioni.
[24] Calvino, "Rapidità," in *Lezioni americane*, 661.
[25] Ibid., 656.
[26] Ibid. 659–60.

per esempio che esista una figura che è un triangolo isoscele ($S(x)$) che è anche equilatero ($M(x)$), e riflettere che nessun triangolo rettangolo (($P(x)$)) è equilatero, per concludere che quel triangolo isoscele non è rettangolo; qualcuno invece penserebbe che qualche persona è diabetica ($S(x)$) e fumatrice ($M(x)$), e che ogni persona vegetariana (($P(x)$)) non è fumatrice, per concludere che qualche persona è diabetica e non vegetariana.

2. Bourbaki: matematica e logica

L'opera programmata da Bourbaki non doveva essere un'enciclopedia, ma un modo nuovo di concepire, fare e esporre la matematica. André Weil avvertiva:

> le matematiche moderne hanno assunto non solo un'estensione ma anche una complessità tali che è diventato urgente—se la matematica deve continuare a esistere senza scindersi in una miriade di minuscoli spezzoni di ricerca—compiere un enorme lavoro di unificazione che assorba in alcune teorie semplici e generali tutto il sostrato comune alle diverse branche della scienza, sopprima le cose inutili e lasci intatto ciò che è veramente il dettaglio specifico di ogni grande problema. In questo risiede quanto di buono (e non è poco) può esserci nelle assiomatiche.[27]

Nel 1938 incominciarono a uscire fascicoli di teoria degli insiemi per un trattato intitolato *Éléments de mathématique*. Bourbaki impiegò circa trent'anni, nel cuore del Novecento, a completare il nucleo dell'opera, che, letta, studiata e accolta dai matematici della nuova generazione, ebbe un'influenza epocale, cambiando il modo di concepire la matematica, pur sollevando critiche e proteste tra i tradizionalisti e nel mondo della scuola.

Bourbaki ha illustrato la filosofia del suo trattato in poche presentazioni: una introduttiva nel 1939 per mano di un suo rappresentante, Jean Dieudonné (1906–1992),[28] e due nel 1948–49, quando invece incominciava a essere considerato.[29] Dieudonné ci ha lasciato alcune affermazioni da antologia, come:

> Ogni matematico che abbia a cuore l'onestà intellettuale è costretto a questo punto da una necessità assoluta a presentare i suoi ragionamenti in forma assiomatica, il che significa in una forma per cui le proposizioni sono legate grazie solo alle regole della logica, facendo astrazione da ogni "evidenza" intuitiva suggerita alla mente dai termini che vi occorrono.[30]

Dieudonné esalta innanzi tutto il ruolo di Hilbert, attribuendogli diversi meriti; il primo è la revisione da lui compiuta della geometria (nelle *Grundlagen* del 1899). Ricorda poi la cosiddetta crisi dei fondamenti dell'inizio secolo, vale a dire la circostanza che il

---

[27] Lettera di André a Simone Weil del 26 marzo 1940 in André e Simone Weil, *Correspondance familiale*, a cura di Robert Chenavier e André A. Devaux, in Simone Weil, *Oeuvres complètes*, Tome 7, vol. 1 (Paris: Gallimard, 2012); trad. it. André e Simone Weil, *L'arte della matematica* (Milano: Adelphi, 2018), 65–66.

[28] Jean Dieudonné, "Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques," *Revue scientifique* 86 (1939): 224–32; ristampato in *Les grands courants de la pensée mathématique*, a cura di François Le Lionnais (Paris: A. Blanchard, 1962), 543–55. Le citazioni rimandano a questa edizione.

[29] Il primo articolo è Nicolas Bourbaki, "L'architecture des mathématiques," nella prima edizione di *Les grands courants de la pensée mathématique*, a cura di François Le Lionnais (Marsiglia: Cahiers du Sud, 1948) 35–47; trad. ingl., "The Architecture of Mathematics" *American Mathematical Monthly* 57 (1950): 221–32; il secondo: Nicolas Bourbaki, "Foundations of Mathematics for the Working Mathematician," *Journal of Symbolic Logic* 14 (1949): 1–8.

[30] Dieudonné, "Les méthodes axiomatiques," 544.

ragionamento sugli insiemi infiniti, che ora sono "le nozioni matematiche più avanzate," ha dato origine ai paradossi. Nella confusione seguita, secondo Dieudonné è diventato inevitabile chiedersi "quali rappresentazioni mentali debbano corrispondere alle parole usate," corrispondenza che è responsabile della "intelligibilità del linguaggio matematico." Dopo un periodo di disorientamento, sembra ora a Dieudonné che emerga un punto di vista stabile e coerente gradito alle giovani generazioni, grazie di nuovo a Hilbert, che ha proposto "la concezione formalista." Essa si esprime nella seguente considerazione: "il concetto di infinito è ineludibile, con il seguito delle sue difficoltà, se si pensa che l'essenziale di una proposizione sia il suo contenuto, cioè la rappresentazione mentale; l'*impasse* si risolve riconoscendo che è inutile che una proposizione esprima una rappresentazione mentale diversa dalla percezione dei segni con cui è formata."[31]

Dieudonné giustifica l'impostazione formalista sia riproponendo l'analogia con il gioco degli scacchi, già usata nell'Ottocento da matematici come Carl J. Thomae, sia affermando che "non serve a niente avere un'immagine mentale definita degli oggetti su cui si ragiona" perché tutti gli oggetti hanno ora una sola qualità, quella di "essere," ed "essere" significa "essere elementi di insiemi."[32] Sono gli anni in cui la teoria degli insiemi incomincia a essere assunta come quadro per tutta la matematica e il metodo assiomatico risulta possibile, secondo Dieudonné-Bourbaki, solo grazie alla disponibilità di questo linguaggio universale, per usare il quale non è necessario interrogarsi sul senso delle parole.

L'unica carenza rimproverata a Hilbert consiste nel non aver completato il compito di "realizzare la concezione formalista," cioè di assiomatizzare tutta la matematica, come intende fare Bourbaki, ma di essersi dedicato in seguito alla metamatematica.

Sembra chiaro tuttavia che Dieudonné apprezzava la concezione dell'assiomatica di Hilbert come questi l'aveva formulata, al punto da riprendere la famosa dichiarazione a lui attribuita, che in geometria i termini "punto, retta, piano" possono continuare a essere usati, ma si potrebbero sostituire con altri arbitrari ("tavoli, sedie, boccali di birra"), purché le relazioni che coinvolgono queste parole restino invariate. Allora "se le affermazioni ottenute in questo modo hanno ancora un senso intuitivo, si ha una nuova interpretazione intuitiva delle proposizioni geometriche."[33] Addirittura Dieudonné propone un altro esempio, ispirato da quello con cui Poincaré aveva interpretato la geometria iperbolica in quella euclidea, presentando un dizionario attraverso cui si ottengono da proposizioni euclidee quelle di una geometria non euclidea bidimensionale (geometria di Riemann).

Alcune contraddizioni di questa giovanile concezione sono stridenti, e dieci anni dopo Bourbaki deve eliminarle; resta però Hilbert come nume titolare. Nel 1948 Bourbaki introduce la distinzione tra formalismo logico (con cui intende la logica formale) e formalismo. Afferma che l'unità che il metodo assiomatico fornisce alla matematica "non è l'armatura della logica formale"; l'obiettivo che il metodo assiomatico si pone è "la profonda intelligibilità della matematica."[34] Ma mentre nel 1939 l'intelligibilità era assicurata dal vuoto della parola "insieme," ora è rappresentata dal concetto di "struttura."

Al metodo assiomatico si è giunti secondo Bourbaki attraverso lo studio delle relazioni esistenti tra diverse teorie. Questo studio è stato e deve essere condotto con rigore, e tale condizione è soddisfatta dal formalismo, a cui Bourbaki fa appello. Il formalismo ora consiste in una presentazione precisa della sintassi del linguaggio matematico (che è uno solo, quello insiemistico).

---

[31] Ibid., 546. Sono parole di Dieudonné, una forzatura della vera motivazione di Hilbert per la formalizzazione.
[32] Ibid.
[33] Ibid., 556.
[34] Bourbaki, "The Architecture of Mathematics," 223. Le traduzioni sono dell'autore se non si indica altrimenti.

La logica "per quanto interessa a noi matematici, è né più né meno che la grammatica del linguaggio che usiamo."[35] La logica è un insieme di regole per la formazione di parole e frasi, regole che sono rispettate ma mai studiate, perché esse, come tutte le grammatiche, sono apprese non prima ma solo dopo che il linguaggio è stato imparato. Il formalismo è un formalismo grammaticale, si ferma e si esaurisce nella costruzione della sintassi del linguaggio, e la logica è la grammatica risultante.

Nonostante il ridimensionamento della logica, la matematica formale resta possibile e necessaria, al punto da costituire il primo argomento degli *Éléments*. Il primo libro del trattato, intitolato *Théorie des ensembles*,[36] inizia con un capitolo dedicato alla *Description de la mathématique formelle*. Nella prima pagina dell'introduzione sono descritte le novità che alla *vénérable* eredità dei Greci sono state aggiunte nell'ultimo secolo, che permettono a Bourbaki di affermare che:

> un testo di matematica sufficientemente esplicito potrà essere espresso in un linguaggio convenzionale comprendente solamente un piccolo numero di "parole" invariabili assemblate mediante una sintassi che consisterà in un piccolo numero di regole inviolabili: un testo del genere si dice formalizzato. La descrizione di una partita di scacchi secondo l'usuale notazione, una tavola di logaritmi sono testi formalizzati; le formule del calcolo algebrico ordinario lo sarebbero ugualmente, se fossero completamente codificate le regole riguardanti l'uso delle parentesi e se fossero precisamente rispettate, mentre di fatto alcune di queste regole si apprendono solo con l'uso, e l'uso autorizza certe deroghe.
>
> La verifica di un testo formalizzato non richiede che un'attenzione in un certo senso meccanica, le sole cause di possibili errori essendo la lunghezza o la complicazione del testo; è per questa ragione che un matematico si fida preferibilmente di un collega che gli passa il risultato di un calcolo algebrico, per poco che sappia che il calcolo non è troppo lungo e che è stato fatto con attenzione. Per contro, in un testo non formalizzato si è esposti a errori di ragionamento che rischiano di causare, per esempio, un uso improprio dell'intuizione o un ragionamento per analogia.[37]

Un matematico che desideri essere sicuro della correttezza di una dimostrazione o di una teoria non ricorre a una delle formalizzazioni complete disponibili oggi, "egli si accontenta in generale di portare l'esposizione fino a un punto dove la sua esperienza e il suo istinto (*flair*) di matematico gli insegnano che la traduzione in un linguaggio formalizzato non sarebbe più che un esercizio di pazienza (senza dubbio molto faticoso)."[38]

Esclusi certi casi di palesi errori, "la correzione si fa invariabilmente, presto o tardi, con la redazione di testi che si avvicinano sempre di più a un testo formalizzato, fino a che, a giudizio generale dei matematici, sia diventato superfluo spingere questo lavoro più avanti."[39]

Nel commentare quindi il metodo assiomatico, che si avvia a usare dall'inizio, Bourbaki afferma in modo sibillino ma profetico: "Il metodo assiomatico a essere precisi non è altro che quest'arte di redigere testi la cui formalizzazione è facile da concepire. Non è

[35] Bourbaki, "Foundations of Mathematics for the Working Mathematician," 1.
[36] Citiamo dalla terza edizione, Nicolas Bourbaki, *Éléments de mathématique*, libro 1, *Théorie des ensembles* (Paris: Hermann, 1966).
[37] Bourbaki, *Éléments de mathématique*, 1–2.
[38] Ibid., 2.
[39] Ibid.

un'invenzione nuova; ma il suo uso sistematico come strumento di scoperta è uno dei tratti originali della matematica contemporanea." In chiusura assicura comunque che "abbandoneremo presto la matematica formalizzata, non senza aver avuto cura prima di tracciare con precisione il cammino per cui si possa ritornare ad essa."[40]

3. Astrazione, analogie, proliferazione e complessità

Il successo di Bourbaki nel successivo periodo è stato innegabile, causa e riflesso dell'enorme proliferazione della matematica, da inquadrare anche nella sfida dei fenomeni sociali seguenti la seconda guerra mondiale: l'aumento della popolazione da due a otto miliardi di persone, con la crescita di utenti ma anche di creatori di nuova matematica che ogni anno si accumula, nelle pubblicazioni (da tempo si è superato il limite del milione per gli articoli cartacei pubblicati ogni anno) e ora ancor più in rete; l'arrivo del calcolatore elettronico, la conseguente organizzazione nuova della comunicazione e della collaborazione scientifica, la trasformazione e la penetrazione della tecnologia dell'informazione. Se è vero che i problemi tecnici e scientifici del periodo di sviluppo post-bellico hanno favorito la comparsa di varie ricerche non rientranti nella sintesi di Bourbaki, con una moltiplicazione dei linguaggi e una frantumazione dell'unità custodita dal suo castello, è anche da ricordare che il nucleo individuato dagli *Éléments*—di fatto il proseguimento della matematica classica - ha trovato paradossalmente un alleato inaspettato nella fisica teorica.

Insieme alla proliferazione, una caratteristica sempre più marcata della ricerca è quella dell'astrazione, che permette di lavorare con categorie più ampie e comprensive. Il processo di astrazione ha finito per cambiare l'immagine stessa della matematica. Con la teoria sulle radici delle equazioni algebriche di Galois e Abel a inizio Ottocento non sono più le soluzioni ma la risolubilità a essere oggetto di studio; con Hilbert la logica studia la dimostrabilità, e le dimostrazioni diventano oggetti, secondo la dichiarazione del 1922, mentre prima erano pensieri; con Turing diventano oggetto non solo i calcoli, ma la calcolabilità.

L'astrazione ha reso possibile il dispiegarsi di una strategia per affrontare per analogia problemi particolari: si cercano in aree differenti oggetti che ricadono sotto una stessa categoria di quello in esame, o hanno la stessa essenza, e forniscono con la loro rete di relazioni ulteriori informazioni per il ritrovamento delle soluzioni.[41]

Tali ricerche astratte favoriscono una caratteristica tipica della matematica contemporanea, quella della fertilizzazione incrociata. Weil fin dal 1940 ha messo in evidenza il valore emblematico del lavoro di Richard Dedekind, che ha dimostrato per via puramente algebrica i risultati elementari della teoria delle funzioni algebriche di una variabile, ottenuti fino allora per via trascendente da Riemann;[42] con i metodi di Dedekind, proprio perché sono "puramente algebrici" si possono prendere i coefficienti in un qualsiasi corpo.[43] L'analogia tra polinomi in x e numeri interi è così naturale da essere anche sfiorata nell'insegnamento scolastico quando si determina il MCD tra polinomi, ricorda Weil alla sorella nella lettera citata. Le spiega anche che trovare le assunzioni minime necessarie per risolvere problemi permette di rendere trattabili anche situazioni più astratte; una stessa dimostrazione vale per situazioni considerate diverse nella terminologia tradizionale

[40] Bourbaki, *Éléments de mathématique*, 6.

[41] In verità, l'essenza si trova, o ci si approssima ad essa, partendo da aree che già condividono qualche proprietà, ricadendo sotto gli stessi assiomi, e per certi aspetti sono quindi analoghe. Il libro di Douglas Hofstadter e Emmanuel Sander, *Surfaces and Essences. Analogy as the Fuel and Fire of Thinking* (New York: Basic Books, 2013) è dedicato all'analogia per la formazione di categorie e per il *problem solving*.

[42] Le funzioni algebriche sono definite da un'equazione $P(x,y) = 0$ dove P è un polinomio a coefficienti complessi. Con "via trascendente" si allude all'uso della teoria delle funzioni analitiche di variabili complesse.

[43] Un corpo in algebra è una struttura con due operazioni binarie che soddisfano le stesse leggi di addizione e moltiplicazione dei numeri reali.

(elaborata in momenti o epoche diverse) se si basa su assiomi condivisi. Lo studio di enti più astratti mantiene così un legame con quelli più tradizionali.

Molte voci riconoscono e sottolineano la presenza dell'analogia in tutte le ricerche di avanguardia. Bisogna avvertire però che il ricorso all'analogia non è una scoperta o novità della matematica contemporanea. Poincaré aveva già segnalato che una ricerca non consiste nel muoversi a tentoni con piccoli avanzamenti al buio ma è sempre guidata da un'idea, e ciò che la guida "è principalmente l'analogia."[44]

Le analogie sono alla base di tutto il pensiero matematico, fin dall'acquisizione dei concetti di base, quando si fa riferimento a situazioni reali, nei cosiddetti *word problems* dell'istruzione elementare;[45] ma sono diventate così naturali che ci si scorda della loro funzione fondativa. Non si vuole imputare a Weil e Mazur ingenuità o dimenticanza, *repetita iuvant*. Con il crescere dell'astrazione prevale il pregiudizio sul rigore, e il timore che le analogie non lo rispettino, mentre sono un cardine del lavoro matematico; è l'interazione tra astrazione e analogia che ha avuto affetti esplosivi sulla sua proliferazione.

Cosa questo abbia a che fare con il metodo assiomatico lo spiega Queneau nell'elogio di Bourbaki:

> Il lettore riluttante [che non capisce la necessità di definizioni pignole e minuziose] […] ne scopre l'interesse […] quando trova nel capitolo VII, paragrafo 1, n. 4 e 5, proposizione 6, che l'impostazione assiomatica permette di dare una doppia (e parallela) dimostrazione sia dell'infinità dei numeri primi sia dell'infinità dei polinomi unitari irriducibili su un corpo *K*. Si capisce allora che la nozione di divisibilità, per applicarsi a tutti (al massimo numero di) "casi," ha dovuto essere generalizzata, e che è nel quadro della teoria dei gruppi ordinati (e reticolati) che può esserlo e applicarsi allora non più soltanto ai numeri reali, ma anche agli insiemi di elementi qualunque che possano prendere la detta struttura. […] Quello che si perde in "intuizione" si guadagna in efficacia.[46]

Si può descrivere che cosa succede salendo in astrazione con l'immagine della struttura di albero: la "strategia di mettere in evidenza parti essenziali di un problema e filtrare i dettagli meno importanti" permette di guardare il problema dall'alto e aumentare l'ambito delle applicazioni: come chiedere al nonno informazioni sui cugini, e lui che è più in alto nell'albero genealogico vede tutti i nodi successori.[47]

Si sale nel livello di astrazione attraverso la registrazione e il mantenimento di quegli assiomi che intervengono realmente in ciascun teorema. Se a un insieme di assiomi T s'aggiunge come eventuale nuovo assioma un $A \notin T$ allora si danno tre possibilità: o tutti i modelli di T soddisfano A, e allora A è un teorema e la sua aggiunta come assioma è superflua; o nessuno soddisfa A e allora $\neg A$ è un teorema di T e $T \cup \{A\}$ è contradditorio;

---

[44] Henri Poincaré, *La valeur de la science* (Paris: Flammarion, 1911), 31.

[45] Si pensi all'analogia della divisione con la distribuzione di oggetti; tali analogie sono inevitabili nel primo apprendimento, ma diventano talvolta deleterie quando le si trasportano a domini più generali (la divisione per un numero minore di 1 è difficile da accettare, perché aumenta il risultato). Il cap. 7 di Hofstadter e Sander, *Surfaces and Essences* studia le analogie in matematica.

[46] Queneau, "Bourbaki et les Mathématiques de demain," *Critique* (1962): 3–18, rist. in *Bords* (Paris: Hermann, 1963), 11–29. Per quanto, occorre cautela: l'intuizione ha troppe accezioni, anche contraddittorie; per Queneau è la visione favorita dalla consuetudine, per Weil è "la facoltà di vedere un rapporto tra cose in apparenza del tutto dissimili," lettera del 26 marzo 1940 di André a Simone, in André e Simone Weil, *L'arte della matematica*, 62.

[47] Immagine di Franco Tomarelli, "Ricordo di Claudio Baiocchi," *Notiziario UMI* (gennaio 2021). Gli alberi in matematica sono rappresentati di solito come gli alberi genealogici, con i rami che crescono all'ingiù.

oppure alcuni soddisfano A e altri no, e allora la classe dei modelli di $T \cup \{A\}$ si restringe rispetto alla classe dei modelli di T. Viceversa togliere un assioma indipendente comporta l'ampliamento della classe dei modelli, e quindi maggiore generalità.[48]

Infine la combinazione di astrazione e *cross-breeding* ha prodotto un nuovo fenomeno, a cui ora accenneremo, quello delle dimostrazioni di lunghezza abnorme, e di complessità esorbitante per la disparità di conoscenze che confluiscono negli enunciati dei teoremi.

4. Nel terzo millennio

Alla matematica ereditata dal XX secolo resta da aggiungere l'elemento veramente nuovo, il calcolatore. Nuovo non tanto per le prestazioni nei calcoli e per le esplorazioni di successioni o di approssimazioni di soluzioni di equazioni con sempre maggiore estensione e precisione, quanto per la deduzione automatica, quel passo dove Bourbaki *feared to thread*.

La meccanizzazione dei sistemi deduttivi, cioè la loro trasformazione in (riscrittura come) programmi eseguibili da un calcolatore, è iniziata con la *Logic Machine* di Newell, Shaw e Simon, del 1957, che provava teoremi del calcolo proposizionale usando gli assiomi dei *Principia mathematica*; nel 1959–60 un programma di Hao Wang dimostrava tutte le circa 400 leggi logiche che occorrono nel calcolo dei predicati dei *Principia* in soli 8 minuti, con grande scalpore.[49] Ma le prime dimostrazioni a essere prodotte sono state quelle di correttezza, innanzi tutto dei programmi: sono le dimostrazioni che un programma fa quello per cui è stato disegnato, calcola proprio la funzione voluta nello scrivere un algoritmo.[50] Se un programma deve eseguire una deduzione, ovviamente formale, la dimostrazione che è corretto diventa una dimostrazione di correttezza della deduzione. Quindi sono venute dimostrazioni assistite da calcolatore, che più che deduzioni o correttezza forniscono teoremi matematici.

La prima è stata quella del teorema dei quattro colori, che ha provocato vivaci discussioni sulla natura della matematica e della dimostrazione.[51] Sono seguite le dimostrazioni della non esistenza di un piano proiettivo di ordine 10, della congettura di Johannes Kepler sull'impacchettamento delle sfere, della congettura di Robbins, del teorema di Feit-Thompson, e altre.

Una lamentela sulle dimostrazioni prodotte da dimostratori automatici è che possono essere verificate solo da altri dimostratori e restano inevitabilmente opache. Tuttavia i dimostratori possono anche fare mosse intelligenti. Nel 1996 W. McCune ha risolto con un suo programma EQP la congettura di Robbins.[52] La derivazione dell'equazione critica

[48] Supponiamo naturalmente che per la logica usata valga il teorema di completezza, ma si tenga conto che la teoria degli insiemi si assiomatizza nella logica del primo ordine, completa.

[49] Il primo dimostratore meccanico in verità deve essere considerato un programma di Martin Davis del 1954 che però non eseguiva dimostrazioni formali, ma forniva un metodo di decisione per l'aritmetica di Presburger, cioè l'aritmetica con la sola addizione.

[50] Turing per primo ne aveva capito la necessità, e aveva iniziato a scriverne manualmente, vd. "Checking a large routine" del 1949, pubblicato in Alan M. Turing, *Mechanical Intelligence*, a cura di C. C. Ince (Amsterdam: North Holland, 1992), 129–31.

[51] Vd. per esempio Thomas Tymoczko, "The Four-Color Problem and its Philosophical Significance," *The Journal of Philosophy* 76 (1979): 57–83. Il teorema afferma che una superficie piana divisa in regioni connesse senza exclavi può essere colorata con soli quattro colori in modo che regioni adiacenti (cioè che abbiano una linea continua in comune) non abbiano mai lo stesso colore (e richieste ulteriori per escludere facili controesempi); congetturato nel 1852 da Francis Guthrie, dopo molti tentativi e annunci rivelatisi errati, è stato dimostrato da Kenneth Appel e Wolfang Haken nel 1977: con considerazioni teoriche si riduce il numero delle configurazioni possibili, da esaminare, a circa 1500, e queste sono sottoposte quindi alla verifica di un algoritmo.

[52] Riguarda una diversa assiomatizzazione delle algebre di Boole, con altre equazioni, e afferma che la nuova è equivalente a quella tradizionale.

prodotta da EQP consiste di 49548 equazioni, ma il programma ha fatto vedere solo le 13 che riteneva decisive, per mostrare la traccia della dimostrazione. Controlli rigorosi sono stati fatti comunque mediante repliche con altri dimostratori, come Otter.

La congettura di Kepler, che l'impacchettamento ottimale sia quello dei fruttivendoli,[53] è stata considerata dimostrata solo al 99% dopo quattro anni di esame del lavoro di Hales da parte degli esperti; quindi questo è stato validato nel 2014 usando il programma Isabelle. Il teorema di Walter Feit e John Griggs Thompson fu dimostrato nel 1962.[54] Una loro dimostrazione del 1960 di un teorema collegato aveva fatto scalpore perché a differenza delle usuali dimostrazioni nella teoria dei gruppi aveva una lunghezza di ben 17 pagine. Quella del 1962 ne richiedeva già 225. La dimostrazione è stata verificata dal programma di correzione automatica Coq.

I programmi citati sono esempi di dimostratori, o automatici (*Automatic Theorem Prover*) o interattivi ITP (*Interactive Theorem Prover*) che stanno diventando sempre più evoluti, programmi che intanto verificano la correttezza dei brani di dimostrazioni sottoposti, e per parte loro cercano nella libreria enunciati collegati, ed eseguono altri segmenti della dimostrazione. Senza entrare in dettagli tecnici è facile immaginare che per la scrittura di un dimostratore ITP capace di gestire dimostrazioni di centinaia di pagine di matematica astratta siano necessarie considerazioni metalogiche vaste e approfondite, e non sempre disponibili a un programmatore. Inoltre per ottenere che siano "intelligenti" deve anche essere insegnato a questi programmi a cercare in tutta la matematica quelle conoscenze che possono servire, come peraltro si fa con gli studenti. Le difficoltà infatti si rivelano già nel modo di studiare delle nuove generazioni.[55]

Consideriamo come s'insegna la matematica pura dall'università al dottorato. Agli studenti universitari, fin dal corso triennale (nel riferimento italiano, confrontabile con gli studi *undergraduate*), si smette di lasciar credere che le proposizioni matematiche siano accettabili perché "vere" e si deve insegnare loro il concetto di teorema e a capire e fare dimostrazioni. In quelle più semplici "noi operiamo in modo molto simile alla *macchina* che sviluppa la matematica formale - la macchina che ci dice che se P è vera e se P implica Q, allora Q è vera, e altre simili regole logiche," partendo dagli assiomi.[56]

La disposizione a ricondursi agli assiomi continua a giocare un ruolo importante nell'insegnamento successivo, con i corsi di teoria dei gruppi, algebra lineare e analisi reale.

> Dagli assiomi [dei gruppi] il docente può andare avanti a costruire la teoria con sottogruppi, sottogruppi normali, omomorfismi di gruppo, nuclei, immagini, gruppi quoziente, e dimostrare il primo teorema d'isomorfismo per i gruppi. A questo stadio nello sviluppo della matematica, ogni dimostrazione può ancora essere fatta risalire fino agli assiomi del sistema che stiamo

---

[53] Il cosiddetto impacchettamento cubico a facce centrate o quello esagonale, con densità media 0.74, dimostrato da Thomas C. Hales nel 1998, come annunciato in Thomas C. Hales, "Cannonballs and Honeycombs," *Notices AMS* 47 (2000): 440–49.

[54] Il teorema è tra quelli che hanno innescato la classificazione dei gruppi finiti semplici. Esso afferma che ogni gruppo finito di ordine dispari è solubile [le definizioni, come le altre a fondo pagina, si trovano in qualsiasi esposizione elementare della teoria dei gruppi, vd. Joseph Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups* (Berlino: Springer, 1994) o Guido Zappa e Rodolfo Permutti, *Gruppi corpi equazioni* (Milano: Feltrinelli, 1963)]. La suddetta classificazione, terminata intorno al 2004, è un'impresa che coinvolge, a una stima approssimativa, più di 15000 pagine di contributi.

[55] Riassumiamo qui di seguito recenti considerazioni di K. M. Buzzard, esposte in Kevin M. Buzzard, "Proving Theorems with Computers," *Notices AMS* 67 (2020): 1791–99, che concordano con altre qualificate testimonianze.

[56] Ibid., 1792.

> considerando, e ci si aspetta che gli studenti imparino da tali corsi che la matematica può essere fatta in questo modo.[57]

Gran parte della matematica pura insegnata all'università, anche per la laurea magistrale, è di questa forma. Poi gli studenti che "ci convincono di saper gestire correttamente i loro argomenti [matematici], sono premiati con posti per il dottorato."[58]

I dottorandi ora hanno accesso alla letteratura matematica, e "da questo momento essi possono assumere qualsiasi risultato vogliono, purché sia pubblicato in una rivista ragionevolmente prestigiosa e il loro relatore creda che sia corretto." Lo studente "potrebbe anche sapere come dimostrarne alcuni, ma non necessariamente tutti."[59] Buzzard racconta il suo caso, al tempo del dottorato, quando non aveva letto i dettagli della dimostrazione di un teorema di Deligne sul quale era basata la sua tesi. In verità,

> in quel periodo esisteva solo realmente una traccia della dimostrazione del risultato nella letteratura. Ma non era un problema, perché la dimostrazione del teorema di Deligne era "nota agli esperti." Si suppone che gli studenti si formino una loro comprensione intuiva della loro area, e andando avanti dovrebbero sviluppare la sensibilità di distinguere quello che è accessibile a partire da risultati noti da quello che richiede un'idea veramente nuova.[60]

Da alcuni anni ormai la situazione di chi si avvia alla ricerca è riconoscibile nella descrizione di Buzzard. Le dimostrazioni svolte nelle aree di punta non solo sono numerose e lunghe ma collegano in sé molteplici aree matematiche. I nuovi dottorandi che devono inserirsi nella ricerca davanti a un simile oceano possono a mala pena conoscere il significato dei teoremi più importanti, e questo soltanto si chiede a loro, di sicuro non tutte le loro dimostrazioni.

Allo stesso modo dei dottorandi, chi lavora all'automazione della matematica deve programmare un dimostratore che sappia cercare aiuti in tutta la matematica come suggerimenti per trovare le sue soluzioni. Anche per i dimostratori, come per gli studenti, si pensa che sia sufficiente, e possibile, conoscere solo gli enunciati dei teoremi. Dottorandi e ITP devono crescere insieme per imparare a fare matematica come descritto nella precedente sezione.

Intanto si costruiscono comunque all'uopo enormi librerie (*libraries*), perché "tutto questo si diffonde più per tradizione orale o epistolare che per pubblicazioni ortodosse."[61] Le librerie, o meglio biblioteche, con accesso gratuito, sono basi di dati di teoremi, libere e open source, a cui possono accedere i vari dimostratori costruiti e in corso di continuo perfezionamento: Coq, Isabelle/Hol, Mizar, Metamath, Agda, Lean e altri.

Non ci si deve tuttavia lasciare impressionare dalle notizie delle performance degli ITP. Secondo Buzzard, che pure è un entusiasta lavoratore nel campo, il giorno in cui i calcolatori competeranno con gli umani nella dimostrazione non arriverà mai se non è preparato modificando l'atteggiamento dominante. Chiede allo scopo (in un dibattito sull'argomento nel sito FOM [*Foundations of Mathematics*: fom@cs.nyu.edu] del marzo 2021) che s'incominci a fare usare gli ITP agli studenti per i loro studi; in questo modo cresceranno anche gli ITP: l'obiettivo è "insegnare al computer le definizioni degli oggetti che gli

---

[57] Ibid.
[58] Ibid.
[59] Ibid.
[60] Ibid.
[61] Lettera del 26 marzo 1940 di André a Simone, in André e Simone Weil, *L'arte della matematica*, 65. Weil non si riferisce al calcolatore ma alla proliferazione.

[studenti universitari] umani studiano," perché al momento questi sistemi a mala pena conoscono la matematica della triennale, cioè algebra di base, il calcolo differenziale, le equazioni differenziali e la geometria analitica.

Altri segnali dal mondo della ricerca concorrono nella stessa direzione. Nel 2007 Vladimir Voevodsky e Steve Awodey hanno proposto un sistema di assiomi nel linguaggio delle categorie, noto come *Univalent Foundations*,[62] che, a parte il contenuto degli assiomi sulle categorie che qui non interessano, impone il vincolo di rappresentare tutte le relative dimostrazioni in un linguaggio della logica dei tipi (un perfezionamento di quella di Russell di un secolo prima); in questo modo le dimostrazioni possono e debbono essere verificate e approvate da un dimostratore automatico di correttezza.

I matematici anche apparentemente più lontani nelle loro ricerche dall'informatica e dalla logica sembrano adesso orientati a sviluppare il loro lavoro in un ambiente pienamente formalizzato e solo dopo "deformalizzarlo" per la comunicazione umana. Il prodotto dell'attività creativa deve essere letto e capito da un essere umano come complemento a una dimostrazione formale, che a sua volta sia stata verificata da una macchina.

5. Macchine e letteratura

Forse anche la letteratura come ora è prodotta da umani e una letteratura prodotta da macchine possono procedere in armonia? O addirittura fondersi in quella del futuro? Calvino nel 1967 in "Cibernetica e fantasmi" aveva esposto un elogio del calcolatore dove sembrava accettare pienamente l'ipotesi di una letteratura meccanicamente generata, e quasi augurarsela, forse sorprendendo anche se stesso: "Ora qualcuno di voi si domanderà perché annuncio con aria tanto giuliva prospettive che alla maggior parte degli uomini di lettere suscitano lamentazioni lacrimose punteggiate da gridi d'esecrazione? La ragione è che più o meno oscuramente ho sempre saputo che le cose stavano così."[63] Le teorie estetiche secondo Calvino sostengono infatti che la poesia sia un'ispirazione "discesa da non so quali altezze o sgorgante da non so quali profondità," o un momento della vita dello spirito o voce dei tempi o un rispecchiamento delle strutture sociali, o immagini dell'inconscio "direttamente scodellate" sulla pagina; ma resta un vuoto, che riguarda "come si arriva alla pagina scritta." La cosiddetta personalità dell'autore "è interna all'atto dello scrivere" e "anche una macchina scrivente, in cui sia stata immessa un'istruzione confacente al caso, potrà elaborare sulla pagina una 'personalità' di scrittore."[64]

Tre anni dopo ridimensionerà un poco il suo entusiasmo,[65] ma alcune riflessioni o scoperte di quel periodo continuano a tralucere nei suoi scritti anche se Calvino non tornerà in modo esplicito sul tema.

Proprio nel 1967 Calvino era entrato in contatto con Queneau per la traduzione di *Les fleurs bleues* (*I fiori blu*), e conosceva naturalmente l'esistenza dell'Oulipo, *Ouvroir de littérature Potentielle*, il movimento fondato nel 1960 da Queneau e François Le Lionnais per promuovere la produzione di opere strutturate secondo rigidi vincoli sintattici, obbedienti a regole in genere combinatorie, nella convinzione che tali costrizioni (*contraintes*) estreme stimolassero l'immaginazione. Forse nel 1967 non aveva ancora meditato e fatto propri quei

---

[62] Vd. Steve Awodey, Thierrry Coquand e Vladimir Voevodsky, *Homotopy Type Theory* (Princeton: Institute for Advanced Study), 2013.

[63] Calvino, "Cibernetica e fantasmi," 214.

[64] Ibid., 215.

[65] In "La macchina spasmodica" (1970) in Calvino, *Saggi 1945-1985*, 1:252–55, riassume la struttura della sua conferenza del 1967 come esposizione di "un metodo per addentraci nello sterminato intrico del possibile" con un'andata tranquillizzante (le cose del mondo pensabili sono finite) e un ritorno verso l'imprevisto e l'inesplorato: le costruzioni mentali e le parole sembrano ripetersi in numero limitato, ma "attraverso di esse si aprono spiragli sulla terribilità e ricchezza inesauribili del mondo."

suggerimenti, aveva scritto solo due poesie di prova nel 1962–64; invece nel 1973 entra in Oulipo, e negli anni 1972–83 esegue numerosi altri esercizi, poesie, racconti.[66] Nel 1979, in risposta alla lezione appresa dall'Oulipo produce un'opera complessa come *Se una notte d'inverno un viaggiatore,* dove offre un ventaglio di testi sostituibili, incastonati in un racconto unico; il libro rappresenta la realizzazione di un'opera sottoposta a vincoli costruttivi multipli e complicati, le tante "constraintes o regole del gioco che mi sono posto."[67]

Il nucleo duro della lezione Calvino coglie poi l'occasione di esplicitarlo nel 1981, nell'introduzione a *Segni, cifre e lettere e altri saggi* di Queneau, "La filosofia di Raymond Queneau"; a questi Calvino attribuisce la convinzione che "la struttura è libertà, produce il testo e nello stesso tempo la possibilità di tutti i testi virtuali che possono sostituirlo. Questa è la novità che sta nell'idea della 'molteplicità potenziale', implicita nella proposta di una letteratura che nasca dalle costrizioni che essa sceglie e s'impone."[68]

La molteplicità potenziale, in tutta la sua produttività, è implicita solo se, come era in Queneau, le costrizioni riconosciute più significative sono quelle deduttive. Calvino non poteva, visti i loro rapporti, non conoscere "Les Fondements de la Littérature" del 1976,[69] dove Queneau con la sola sostituzione sistematica delle parole "*mots, phrases, paragraphes*" a "*points, droits, plans*" nelle prime pagine delle *Grundlagen* di Hilbert ottiene un testo che è una base assiomatica di una teoria della scrittura. Il "testo con la possibilità di tutti i testi virtuali che possono sostituirlo" Queneau l'ha imparato da Hilbert, non è altro che il principio del metodo assiomatico.

A conferma soccorre una citazione di Jacques Roubaud,[70] che Calvino inserisce nel commento alla produzione di Queneau di *Cent mille milliards de poèmes* con dieci sonetti con le stesse rime e con una struttura grammaticale opportuna; Roubaud spiega che su un sonetto qualsiasi, di Baudelaire per esempio, l'artificio non funziona, ci si scontra con "difficoltà d'ordine soprattutto sintattico, contro le quali Queneau s'era premunito in anticipo (ed è per questo che la sua 'struttura' è 'libera'). Ma […] contro le costrizioni della verosimiglianza semantica, la struttura sonetto fa, virtualmente, d'un sonetto unico tutti i sonetti possibili per le sostituzioni che la rispettano."[71]

Queneau si premunisce dunque fissando la struttura sintattica che rende possibili tutte le sostituzioni che la rispettano. Calvino già nel 1968 aveva incorporato nella sua concezione i due principi della molteplicità potenziale rappresentati dall'assiomatica e dalle dimostrazioni formali. Dichiarava infatti:

---

[66] Tutti inclusi in Italo Calvino, *Romanzi e racconti*, a cura di Mario Barenghi e Bruno Falcetto (Milano: Mondadori, 1991), 1:313–43.

[67] Lo spiega nella risposta su *Alfabeta* I (1979): 4–5 alla recensione di Angelo Guglielmi di *Se una notte d'inverno un viaggiatore,* inclusa in Calvino, *Romanzi e racconti,* a cura di Mario Barenghi e Bruno Falcetto (Milano: Mondadori, 1992) 2:1388–97. Da considerare sarebbe anche il precedente *Il Castello dei destini incrociati*, commentato da Calvino in "Molteplicità," in *Lezioni americane*, 730.

[68] Calvino, *Saggi 1945-1985*, 1:1429. "La filosofia di Raymond Queneau" è in Ibid., 1:1410–30.

[69] Raymond Queneau, "Les Fondements de la littérature/d'après David Hilbert," *Bibliothèque Oulipienne* 3 (1976), ristampato in *La Bibliothèque Oulipienne* (Paris: Seghers), 35–46. Una traduzione italiana è in Gabriele Lolli, *Il fascino discreto della matematica. Calvino, l'Oulipo e Bourbaki* (Pisa: ETS, 2021), 46–51.

[70] Jacques Roubaud è un rappresentante significativo dell'Oulipo: Bourbakista, professore di matematica all'Università di Paris X e professore di poesia all'EHESS (*École des hautes études en sciences sociales*). Anche Roubaud si è cimentato in un esercizio di sostituzione di termini tecnici di alcune pagine dell'introduzione alla *Topologie Générale* di Bourbaki (*limite, continuité, voisinage*) con parole comuni (*horizon, lecture, visibilité*), ottenendo un breve saggio dal titolo *Paysages déductifs* inserito in Jacques Roubaud, *Mathématique* (Paris: Éditions du Seuil, 1997), 145–46. Vd. Lolli, *Il fascino discreto della matematica*, 55–65.

[71] Calvino, Sag*gi 1945-1985*, 1:1428–89.

> Quello che m'interessa è il mosaico in cui l'uomo si trova incastrato, il gioco dei rapporti, la figura da scoprire tra gli arabeschi del tappeto. Tanto so già che dall'umano non scappo […]: le storie che scrivo si costruiscono all'interno di un cervello umano, attraverso una combinazione di segni elaborate dalle culture umane che mi hanno preceduto. Così negli ultimi racconti che chiudono il volume *Ti con zero* ho cercato di *far diventare racconto un mero ragionamento deduttivo* e forse - qui sì - mi sono allontanato dall'antropomorfismo: o meglio da un certo antropomorfismo, perché queste *presenze umane definite solo da un sistema di relazioni*, da una funzione, sono proprio quelle che popolano il mondo intorno a noi.[72]

In questa confessione sono presenti, nei corsivi, due richiami, le "presenze definite solo da un sistema di relazioni" al metodo assiomatico, e i "racconti che sono meri ragionamenti deduttivi" alle dimostrazioni formali. Per completare il riferimento alla matematica del terzo millennio non resta che aggiungere e collocare il calcolatore. Ma quel "tanto […] dall'umano non scappo" della prima parte della precedente citazione sembra l'eco proprio della possibilità di sostituire umani con macchine, che riporta alla conferenza "Cibernetica e fantasmi," elaborata solo nell'anno precedente.

Calvino introduce l'argomento della conferenza spiegando che "il mondo nei suoi vari aspetti viene visto sempre più come discreto e non come continuo." Quindi elenca i campi dove si ha una rivincita della "discontinuità, divisibilità, combinatorietà, su tutto ciò che è corso continuo, gamma di sfumature che stingono l'una sull'altra," menzionando: la ricerca storica ("non seguiamo più il corso di uno spirito immanente […] ma le curve dei diagrammi statistici"), la biologia (con Watson e Crick "è la teoria dell'informazione che impone i suoi modelli"), la linguistica strutturale (nata su un altro terreno, ha preso a ragionare in termini di codici e messaggi, "a cercare di stabilire l'entropia del linguaggio a tutti i livelli"), l'analisi letteraria della scuola neo-formalista sovietica "capeggiata dal matematico Kolmogorov" che misura "la quantità d'informazione dei testi poetici," l'Oulipo, "fondato da Queneau e alcuni matematici suoi amici," rappresentato dal "rudimentale modello di macchina per costruire sonetti uno diverso dall'altro."

Infine, di particolare rilievo per la letteratura, oltre alle scuole citate, è la circostanza che "[l]'uomo sta incominciando a capire come si smonta e come si rimonta la più complicata e più imprevedibile di tutte le sue macchine: il linguaggio […]. La scuola americana di Chomsky esplora la struttura profonda del linguaggio," con modelli matematici trasformazionali, e "la scuola francese della semantica strutturale di A. J. Greimas analizza la narratività d'ogni discorso, riducibile a una relazione tra 'attanti.'"[73] Calvino è convinto che "[i] cervelli elettronici, se sono ancora lungi dal produrre tutte le funzioni di un cervello umano, sono però già in grado di fornirci un modello teorico convincente per i processi più complessi della nostra memoria, delle nostre associazioni mentali, della nostra immaginazione, della nostra coscienza."[74]

Stabiliti questi procedimenti, "affidato a un computer il compito di svolgere queste operazioni," Calvino si chiede se avremo la macchina capace di sostituire il poeta e lo scrittore:

> E in questo momento non penso a una macchina capace solo di una produzione letteraria diciamo così di serie, già meccanica di per se stessa: penso a una macchina scrivente che metta in gioco sulla pagina tutti quegli

[72] Ibid., 1:234, risposta a un'intervista di *L'Approdo letterario* 41 (1968).
[73] Calvino, "Cibernetica e fantasmi," 211–12.
[74] Ivi, 209.

elementi che siamo soliti considerare i più gelosi attributi dell'intimità psicologica, dell'esperienza vissuta, dell'imprevedibilità degli scatti di umore, i sussulti e gli strazi e le illuminazioni interiori. Che cosa sono questi se non altrettanti campi linguistici, di cui possiamo benissimo arrivare a stabilire lessico grammatica sintassi e proprietà permutative?[75]

Calvino pensa in particolare a una macchina che sia in grado di riprodurre il fenomeno dell'immaginazione, della fantasia. Nella lezione "Visibilità" svolgerà un'analisi di questa facoltà, proponendosi di "situare le visioni nella mente, senza farle passare attraverso i sensi." A differenza di Dante, che può proclamare che le immagini piovono dal cielo, gli scrittori hanno "collegamenti con emittenti terrene [inconscio, ricordi, …] processi che […] esorbitano dalle nostre intenzioni e dal nostro controllo, assumendo rispetto all'individuo una sorta di trascendenza."[76]

I processi immaginativi possono partire dalla parola e arrivare all'immagine o viceversa; i percorsi più articolati sono quelli del cinema, dove si svolgono successioni di fasi materiali e immateriali in cui le immagini prendono forma. Calvino ipotizza che un "cinema mentale" sia sempre in azione in noi, proiettando immagini alla nostra vista interiore. Nel considerare la propria esperienza, Calvino riconosce che l'inizio della sua scrittura sta in un'immagine, poi "si forma un campo di analogie, di simmetrie, di contrapposizioni" e infine si passa alla scrittura, che dall'impostazione iniziale guida nella direzione in cui l'espressione verbale scorre più felicemente. "Il mio procedimento vuole unificare la generazione spontanea delle immagini e l'intenzionalità del pensiero discorsivo." Anche se la mossa d'apertura è visiva, "essa si trova prima o poi catturata in una rete dove ragionamento ed espressione verbale impongono anche la loro logica."[77]

La definizione d'immaginazione in cui Calvino si riconosce è "l'immaginazione come repertorio del potenziale, dell'ipotetico, di ciò che non è stato né forse sarà ma che avrebbe potuto essere […]."[78] Aristotele concorderebbe per la poesia, visto che nella *Poetica* distingue la storia dalla poesia in base al criterio che "la prima riporta solo fatti che sono accaduti, mentre la seconda si occupa di possibilità [e ne segue che] la poesia è cosa di maggior fondamento teorico e più importante della storia perché la poesia dice piuttosto gli universali, la storia i particolari;"[79] e per la matematica Robert Musil (1880–1942) sembra ispirarsi ad Aristotele quando afferma che essa "si può definire una meravigliosa apparecchiatura spirituale fatta per pensare in anticipo tutti i casi possibili."[80]

Così in generale "[l]a mente del poeta e in qualche momento decisivo la mente dello scienziato funzionano secondo un procedimento di associazione d'immagini che è il sistema più veloce di collegare e scegliere tra le infinite forme del possibile e dell'impossibile. La fantasia è una specie di macchina elettronica che tiene conto di tutte le combinazioni possibili

[75] Ivi, 213.
[76] Calvino, "Visibilità", in *Lezioni americane*, 702.
[77] Ibid., 704. Calvino ha chiarito a se stesso la propria "metodologia della narrazione" fin dal 1960 grazie alle osservazioni di François Wahl: "il punto di partenza [è] l'immagine e […] la narrazione svilupp[a] una logica interna dell'immagine stessa," fino alla conclusione di questo 'processo logico,'" lettera a François Wahl del 1 dicembre 1960 in Italo Calvino, *Lettere 1940–1985*, a cura di Luca Baranelli (Milano: Mondadori, 2000), 669.
[78] "Lo *spiritus phantasticus* secondo Giordano Bruno è '*mundus quidem et sinus inexplebilis formarum et speciarum* [...] Ecco, io credo che attingere a questo golfo della molteplicità potenziale sia indispensabile per ogni forma di conoscenza," (Calvino, "Visibilità," in *Lezioni americane*, 706–07).
[79] Justin E. H. Smith, *The Philosopher. A History in Six Types* (Princeton: Princeton University Press, 2016), 8–9; trad. it. Justin E. H. Smith, *Il filosofo. Una storia in sei figure* (Torino: Einaudi, 2016). Smith cita da Aristotele, *Poetica* I,9,51b1-4.
[80] Robert Musil, "L'uomo matematico," (1913); ora in Robert Musil, *Sulla stupidità e altri scritti* (Milano: Mondadori, 1986), 45.

e sceglie quelle che rispondono a un fine, o che semplicemente sono le più interessanti, piacevoli, divertenti.”[81]

6. Mito e dimostrazioni

L’argomento della fantasia come macchina elettronica era stato approfondito da Calvino nella conferenza seguendo suggerimenti di Ernst Kris, sviluppati da Ernst Gombrich, a proposito dello studio di Sigmund Freud sui giochi di parole:

> si parte dal particolare piacere che dà ogni gioco combinatorio; a un certo punto tra le tante combinazioni possibili di parole dal suono simile, una si carica di un valore speciale […]. È successo che l’accostamento di concetti a cui si è pervenuti casualmente scatena inaspettatamente un’idea preconscia, cioè a metà seppellita e cancellata dalla nostra coscienza, o anche soltanto […] tenuta in disparte, ma tale da poter affiorare alla coscienza se a suggerirla non è una nostra intenzione, ma un processo oggettivo.[82]

In riferimento alle combinazioni possibili e casuali esaminate dalla fantasia, è stato Henri Poincaré che ha riconosciuto la presenza attiva dell’inconscio nell’invenzione matematica:[83] “Sorprendente è l’apparizione dell’illuminazione improvvisa, segno manifesto di un lungo, inconscio precedente lavoro.” A proposito di una notte insonne, Poincaré racconta: “Una sera, contro le mie abitudini, bevvi caffè nero e non potevo prendere sonno; le idee sorgevano a frotte; sentivo che si urtavano finché s’incastravano per così dire a coppie, formando una combinazione stabile […]. Allora comprendiamo vagamente cosa distingue i due meccanismi o se volete, i metodi di lavoro dei due ego.” Le idee “sono un po’ come gli atomi uncinati di Epicuro. Quando la mente è in completo riposo gli atomi sono immobili, quasi fossero appesi al muro; possono restare indefinitamente inerti, dunque senza incontrarsi e allora non si formano [nuove] idee.” Il conscio dà il là e indica grosso modo la direzione, mobilizzando le idee dalle quali si può ragionevolmente aspettare una soluzione. Può darsi che non si abbia un risultato immediato, e che “[p]ensiamo di non aver combinato nulla, perché abbiamo già mosso questi elementi […] e non abbiamo ottenuto nessuna composizione soddisfacente.” Ma, in realtà, è come se questi atomi continuassero a saettare in diverse direzioni dello spazio. “Dopo la scossa imposta a essi dalla nostra volontà, non ritornano al precedente riposo. Continuano da soli la loro danza. […] Gli atomi così mobilitati subiscono scontri che li fanno entrare in combinazione tra loro e con altri atomi a riposo, che colpiscono nel loro movimento.” In tali nuove combinazioni sta la possibilità d’ispirazioni apparentemente spontanee.[84]

Calvino, senza ricorrere all’immagine di Poincaré degli atomi uncinati ma in sostanziale accordo, dopo aver descritto come la macchina letteraria effettui tutte le permutazioni di un

[81] Calvino, “Visibilità,” in *Lezioni americane*, 707.
[82] Calvino, “Cibernetica e fantasmi,” 220.
[83] In una conferenza alla Société de Psychologie (*Bulletin de l’Institut Général de Psychologie* 8, n. 3 (1908). Jacques Hadamard) anni dopo ha dato un posto centrale all’intervento di Poincaré nel suo studio dell’invenzione nel campo matematico. Poincaré ha raccontato due episodi nei quali dopo giorni e notti d’intenso ininterrotto lavoro su un problema, e un susseguente stacco per riposare la mente, improvvisamente mentre pensava a tutt’altro, o a niente, aveva visto con chiarezza la soluzione. Vd. Jacques Hadamard, *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field* (Princeton: Princeton University Press, 1945), 13–15; trad. it. Jacques Hadamard, *La psicologia dell’invenzione in campo matematico* (Milano: Raffaello Cortina, 1993).
[84] Hadamard, *An Essay on the Psychology of Invention in the Mathematical Field*, 46–47. Le frasi tra virgolette sono di Poincaré, come riportate da Hadamard.

dato materiale, non solo per un gioco di parole, dà per possibile che la ricerca si concluda con un effetto a cui la coscienza non sarebbe arrivata intenzionalmente, un significato o la premonizione di un significato inconscio. L'inconscio è il mare del non dicibile, di ciò che è rimosso per antiche proibizioni, e parla attraverso parole rubate. La letteratura moderna dà la parola a tutto ciò che nell'inconscio sociale o individuale è rimasto non detto. Non è il trionfo dell'irrazionale ma il rifiuto di credere che l'irrazionale esista. Calvino chiama "mito" il significato inconscio non ancora detto che emerge dalle storie. Di seguito, dedica la parte quinta della conferenza a discutere in che senso, al contrario di quello che generalmente si dice sulla fiaba che viene dopo il mito o è una sua corruzione, "la fabulazione precede la mitopoiesi: il valore mitico è qualcosa che si finisce per incontrare solo continuando ostinatamente a giocare con le funzioni narrative."[85]

Il mito era stato inserito nel discorso nella parte terza della conferenza dove, dopo aver dichiarato che "la letteratura è tutta implicita nel linguaggio, è solo permutazione d'un insieme finito di elementi e funzioni," Calvino aveva aggiunto che la tensione della letteratura è "rivolta continuamente a uscire da questo numero finito," a "dire qualcosa che non sa dire, qualcosa che non può dire, qualcosa che non sa, qualcosa che non si può sapere." La battaglia della letteratura è "uno sforzo per uscire fuori dal linguaggio; è dall'orlo estremo del dicibile che essa si protende; è il richiamo di ciò che è fuori dal vocabolario che muove la letteratura."[86] Per questo "[i]l mito è la parte nascosta di ogni storia, la zona ancora non esplorata perché ancora mancano le parole per arrivare fin là."[87]

Un'ultima precisazione sembra necessaria per capire la possibile creatività di una letteratura automatica secondo Calvino, e riguarda il passo dove il significato inatteso, nella citazione dell'inizio di questo capitolo, è descritto senza commenti come non appartenente a "quel livello linguistico sul quale ci stiamo muovendo, ma slittato su un altro piano." Il motivo per cui può capitare, e non solo come evento casuale, che il significato affiori slittato su un altro piano non potrebbe essere dovuto ad altro che al fatto che la mente è in grado di sdoppiarsi, e lavorare su più livelli. La mente funziona sì come "macchina elettronica" che tiene conto di tutte le combinazioni possibili, ma nello stesso tempo gestisce i linguaggi dell'intimità psicologica, dell'esperienza, delle illuminazioni, analizza o modifica la costruzione dei linguaggi che esprimono fantasia ecc. Una macchina scrivente *programmata come una mente* lavora, per schematizzare, a un livello e a un metalivello. Un processo oggettivo, ancorché opaco, si esprime in una conclusione formulabile nel linguaggio della mente; ma "il risultato poetico sarà l'effetto particolare d'una di queste permutazioni sull'uomo dotato di una coscienza e di un inconscio, cioè sull'uomo empirico e storico," effetto che si verifica quando la combinatoria mette in gioco "qualcosa che […] sta a cuore all'autore o alla società a cui appartiene," e si manifesta perciò solo se "intorno alla macchina scrivente esistono i fantasmi nascosti dell'individuo e della società."[88]

Forse solo l'accenno al mito che si rivela nello sforzo di dire l'indicibile può sorprendere qualche lettore e sembrare fuori luogo in un discorso sulla matematica. Eppure il termine è quanto mai appropriato per i concetti matematici con i quali la ricerca "si protende dall'orlo estremo del dicibile," la zona finora non esplorata perché ancora mancano le parole, se non nella forma di analogie, che Weil descrive come "quei torbidi e deliziosi riflessi dall'una all'altra [teoria o struttura], quegli screzi inesplicabili."[89]

Proponiamo un solo esempio, più accessibile perché preso dalla matematica classica, senza svilupparlo. Nelle ricerche che porteranno alle geometrie non euclidee, il contributo

---

[85] Calvino, "Cibernetica e fantasmi," 222.
[86] Ibid., 217.
[87] Ibid., 218.
[88] Ibid., 221. Ecco spiegati i fantasmi del titolo, i fantasmi della coscienza.
[89] Lettera del 26 marzo 1940 di André a Simone, in André e Simone Weil, *L'arte della matematic*a, 57.

storico di Girolamo Saccheri è stato quello di aver accumulato tante dimostrazioni a partire dalla negazione del quinto postulato di Euclide, con l'obiettivo di dimostrarlo per assurdo; a lui si deve la famosa osservazione che le definizioni che introducono un concetto, un atto delicato che condiziona lo sviluppo di una teoria, sono *filiae plurium demonstrationum*: la fabulazione precede la mitopoiesi.[90] Saccheri, e poi Lobačevsky, Bolyai, accumulando i teoremi, compilano le loro dimostrazioni, cammina cammina, per i sentieri della foresta della geometria, dove tende il loro lavoro?[91] Al punto in cui passa "la vibrazione del mito," la parte sotterranea di ogni dimostrazione si potrebbe dire alla Calvino, non ancora esplorata per mancanza di parole.[92] Il mito taciuto è un vuoto di linguaggio. La parola che lo riempie in questo caso è "coerenza." Ma essa non è pronunciata come obiettivo, questo nell'Ottocento era più ambizioso, era quello di costruire una nuova geometria, e Bolyai vanterà alla fine: "posso solo dire questo: ho creato un nuovo universo dal nulla."[93]

Che in seguito a questa avventura dello spirito non sia più il mondo reale il giudice delle teorie, ma la coerenza, è il mito fondatore della matematica contemporanea, esplicitato da Hilbert,[94] ma in privato perché, ammonisce Weil, "le leggi della matematica moderna impongono il divieto assoluto di menzionare per iscritto simili intuizioni che non sono suscettibili né di un preciso enunciato né, a maggior ragione, di dimostrazione."[95] "Coerenza" è una parola che appartiene alla metamatematica, in particolare alla logica. Grazie all'aritmetizzazione dei linguaggi inventata da Gödel, la si può pronunciare anche nella matematica, ma non dimostrare per teorie contenenti l'aritmetica (il secondo teorema d'incompletezza). Resta così un mito anche nel senso tradizionale d'irraggiungibile, d'irrealizzabile: per quanto si estendano e si perfezionino sistemi formali per la matematica, per nessuno di essi chi percepisce con certezza la correttezza di assiomi e regole potrà affermare che il sistema contiene tutta la matematica. Come sostenuto dallo stesso Gödel, è il mito dell'incompletabilità (*incompletability*) della matematica che alimenta la sua inesauribilità (*inexhaustibility*).[96]

7. La creatività al tempo del computer

La crescente presenza del calcolatore nella crescita della matematica nel nuovo millennio è stata spiegata con i due aspetti essenziali di questa, metodo assiomatico e dimostrazioni formali; il computer viene istruito sulla base dei due capisaldi indicati e sempre più si

[90] Gerolamo Saccheri, *Logica dimostrativa* (1735) (Ed. della Normale, 2012), 127.

[91] Nicolai J. Lobačevsky (1792–1856) e János Bolyai (1802–1860) sono stati i primi costruttori di una geometria non euclidea, quella iperbolica.

[92] La frase precedente "cammina cammina, […] geometria" e quella successiva sulla vibrazione del mito ricalcano la descrizione di Calvino di un immaginario narratore della tribù che racconta una fiaba, in "Cibernetica e fantasmi," 218.

[93] Citato in Roberto Bonola, *Non-Euclidean Geometry* (New York: Dover, 1955), 98, traduzione del saggio Roberto Bonola, *La geometria non euclidea. Esposizione storico-critica del suo sviluppo* (Bologna: Zanichelli, 1906).

[94] "Se assiomi arbitrariamente stabiliti non sono in contraddizione, con tutte le loro conseguenze, […] allora esistono gli enti definiti per mezzo di quegli assiomi," lettera di Hilbert a Frege del 29 dicembre 1899, in Gottlob Frege, *Wissenschaftlicher Briefwechsel* (Hamburg: Felix Meiner, 1976); trad. it. Gottlob Frege, *Alle origini della nuova logica* (Torino: Bollati Boringhieri, 1983), 51.

[95] Lettera del 26 marzo 1940 di André a Simone, in André e Simone Weil, *L'arte della matematica*, 57. Weil si riferisce in verità in questo passo ad un'altra osservazione di Hilbert (relativa alla corrispondenza tra il teorema di Riemann-Roch e i risultati di Dedekind sull'ideale chiamato "differente"), ma esprime una norma diffusa. Comunque anche se la coerenza dimostra l'esistenza di un modello—vd. nota 19—i suoi elementi non sono definiti dagli assiomi, ogni modello è una metamorfosi.

[96] Kurt Gödel, "Some basic theorems on the foundations of mathematics and their philosophical implications," Gibbs Lecture 1951, alla Brown University, in Kurt Gödel, *Collected Works*, vol. 3 (Oxford: Oxford University Press, 1995); trad. it. *Opere*, vol. 3 (Torino: Bollati Boringhieri, 2006), 268–86.

propone non come ancella ma come aspirante ad essere protagonista attivo della nuova produzione. Naturalmente sarebbe ingenuo e irrealistico pensare che la matematica si riduca alle due impostazioni suddette (sia pure con il sussidio dei due complementi menzionati in apertura, la disponibilità di un linguaggio unico—per quanto non indispensabile ma storicamente importante—e la teoria della computabilità, senza la quale invece non sarebbe concepibile il "ricorso a una formalizzazione completa").[97] Anzi sarebbe falso. Manca il motore della crescita.

La matematica è sempre in movimento; dall'esterno si notano i cambiamenti sia nel linguaggio, sia negli argomenti e negli oggetti, o nelle strutture considerate:[98] si scoprono nuove verità?—sarebbe la risposta del platonista—si esplorano nuovi territori della realtà inglobandoli in nuovi modelli?—la risposta del matematico applicato—s'inventano nuovi quesiti o problemi? ma a che scopo, quello del gioco o della sfida intellettuale? e in quale forma, o espressione? In ogni caso, che si ammetta o no una motivazione o una finalizzazione pratica, la questione della crescita evoca il più generale tema dell'invenzione, della creatività.

Le considerazioni dei matematici sulla creatività insistono attualmente sull'uso delle analogie, come abbiamo testimoniato riportando alcune citazioni al riguardo, di Poincaré, Weil, Mazur, Frenkel e segnalando lo studio di Hofstadter, importante in particolare per la discussione delle analogie in fisica teorica.

La strategia, detto in modo molto generale, è quella di trasportare un problema da una categoria ad un'altra nella quale una matematica interessante per la soluzione dello stesso (o di una versione corrispondente) sia più sviluppata.[99] Per casi particolari si può immaginare che un ITP, costruito per lavorare su campi astratti e abitati da una varietà di strutture imparentate, sia in grado di riconoscere analogie, ma una ricerca sistematica e creativa delle stesse richiede una precisa e generale definizione di tale figura retorica e una comprensione del suo carattere meccanico. Sulla difficoltà di tale compito ci limitiamo a ricordare le opinioni contrapposte rappresentate dai due padri del computer Alan M. Turing e John von Neumann.

Nello studio degli automi autoreplicanti,[100] von Neumann pensava a un arricchimento progressivo delle capacità delle macchine, ma si scoraggiava di fronte all'inesauribilità del compito di riconoscere analogie. Non c'era difficoltà secondo lui a descrivere come un organismo potrebbe identificare due triangoli a lati rettilinei, che appaiono sulla sua retina, come appartenenti alla categoria "triangolo"; a questa capacità si poteva aggiungere il riconoscimento di altre figure sempre classificabili come triangoli, con i lati curvi per esempio, o non del tutto tracciati; la descrizione di come riuscire a programmare tali capacità diventava sempre più lunga, ma era ancora fattibile; purtroppo era solo un piccolo frammento trascurabile di quello che potrebbe essere il riconoscimento della analogia geometrica; che a sua volta era solo un piccolo frammento della analogia.

---

[97] Vd. *supra* Bourbaki su metodo assiomatico e testi formalizzati, n. 37

[98] I due tipi di cambiamenti talvolta possono essere collegati; per esempio il linguaggio insiemistico in certe ricerche è sostituito da quello delle categorie. Morfismo è un termine primitivo di tale linguaggio, per le funzioni che conservano la struttura. Nel linguaggio insiemistico "funzione" non era riuscita a essere un termine primitivo, nonostante alcune sollecitazioni al riguardo (vd. Gerhard Hessenberg, "Grundbegriffe der Mengenlehre," *Abhandlungen der Fries'schen Schule*, 1 (1906): 479–706 e John von Neumann, "Eine Axiomatisierung der Mengenlehre," *Journal für die reine und angewandte Mathematik* (*Crelle*), 154 (1925): 219–40).

[99] Voevodsky nella soluzione della congettura di Minor ha definito una categoria di varietà algebriche con morfismi che sono funtori nella categoria dei gruppi che sono analoghi—di qui l'ispirazione—ai classici gruppi di coomologia per spazi topologici. Sull'argomento e per la terminologia, vd. Gabriele Lolli, *Matematica in movimento. Come cambiano le dimostrazioni* (Torino: Bollati Boringhieri, 2022), 243–44.

[100] John von Neumann, *Theory of Self-reproducing Automata*, a cura di Arthur W. Burks (Indiana: University of Illinois Press, 1966); trad. italiana parziale in *La filosofia degli automi e la loro autoriproduzione*, a cura di Vittorio Somenzi (Torino: Boringhieri, 1965) 222–45.

Turing era più ottimista. In un dibattito radiofonico alla BBC del gennaio 1952,[101] il filosofo della scienza R. B. Braithwaite sosteneva che una macchina non può riconoscere similarità quando non c'è nulla nel suo programma che dica quali sono le similarità che ci si aspetta riconosca, mentre può riconoscere analogie quando queste siano state già formalizzate in un modello matematico. Turing si diceva invece convinto di poter fare una macchina che riconosca un'analogia; considerava il caso della doppia negazione, quei "non-non" che proprio non vogliono entrare in testa, finché non viene proposta l'immagine del doppio attraversamento di una strada, da un marciapiede all'altro e viceversa, e allora qualcosa scatta, *This remark might just clinch it*. L'analogia sarebbe per Turing un'imposizione dell'architettura del cervello, dovuta alla necessità di economizzare. Aveva già detto in una lettera a I. J. Good del 18 settembre 1948 che "non vedo tanto il cervello 'in cerca di analogie' quanto piuttosto che le analogie gli siano imposte dalle sue stesse limitazioni."[102] Riteneva inevitabile allargare la ricerca allo studio neurofisiologico del cervello.

Per quanto riguarda Calvino abbiamo visto, sullo sfondo dello statuto attuale della matematica, che la sua decisione di assumere come guida del proprio futuro lavoro (i corrispondenti di) assiomatica e dimostrazioni formali è chiaramente espressa nell'intervista su *L'Approdo letterario* del 1968 citata *supra* (nota 72) la frase "Tanto so già che dall'umano non scappo" poi è tipica di chi accetta consapevolmente e pensa di poter controllare lo strumento meccanico. Il contestuale e implicito interesse per il computer è testimoniato dalla conferenza "Cibernetica e fantasmi."

Alle caratteristiche di una matematica dipendente dagli ITP sono palesemente trasponibili molte delle riflessioni di Calvino stimolate dall'ipotesi di una letteratura meccanicamente generata: i cervelli elettronici che forniscono modelli teorici convincenti "per i processi più complessi […] della nostra immaginazione"; il "campo di analogie, di simmetrie, di contrapposizioni […] di associazioni"[103] che si forma a partire da una prima immagine e il passo successivo di svilupparne gli elementi nella direzione logicamente più agevole; l'accostamento di concetti che scatena un'idea preconscia o tenuta in disparte che affiora se suggerita "da un processo oggettivo." Alla creatività in matematica corrisponde la fantasia per la letteratura. Calvino ha analizzato la fantasia nella lezione "Visibilità" e, tra l'altro, l'ha definita come "una specie di macchina elettronica" che genera tutte le combinazioni di "associazione d'immagini." Calvino è affascinato da una simile possibilità, che permette di "attingere" al "golfo della molteplicità potenziale," lo *spiritus phantasticus*.

Crediamo si possa convenire che, come i valori/caratteristiche della letteratura scelti e commentati da Calvino nelle *Lezioni* se applicati alla matematica ne permettono una descrizione veridica che avvicina i due campi, così la loro integrazione con quello che per la letteratura Calvino si aspetta dalla cibernetica disegna uno scenario estendibile alla matematica del XXI secolo.

---

[101] A. M. Turing, "Si può dire che i calcolatori automatici pensano?" *Sistemi Intelligenti* 10 (1998): 27–40; ristampato in *Menti e macchine*, a cura di Hykel Hosni (Pisa: Edizioni della Normale, 2015) 129–44.

[102] Vd. Andrew Hodges, *Alan Turing. The Enigma* (New York: Simon and Schuster, 1983), 388. Turing immaginava che nel cervello avvenisse una sorta di economia permessa quando due idee hanno la medesima trama di connessioni logiche, e il cervello può usare la stessa più volte per memorizzare la struttura. Finché si parla di "non" e "non-non," diceva a Good, sembra che le parole non arrivino alla parte giusta del cervello; con l'immagine dell'attraversamento, ci arrivano, ma per una via diversa da quella diretta.

[103] Calvino oltre alle analogie considera altre forme, ma anche queste, simmetrie, contrapposizioni, rientrano nella creatività matematica.